



LỚP  
12

## GIẢI TÍCH

### Chương 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

### Bài 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC (tt)

**II** TÍNH THỂ TÍCH

**III** THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

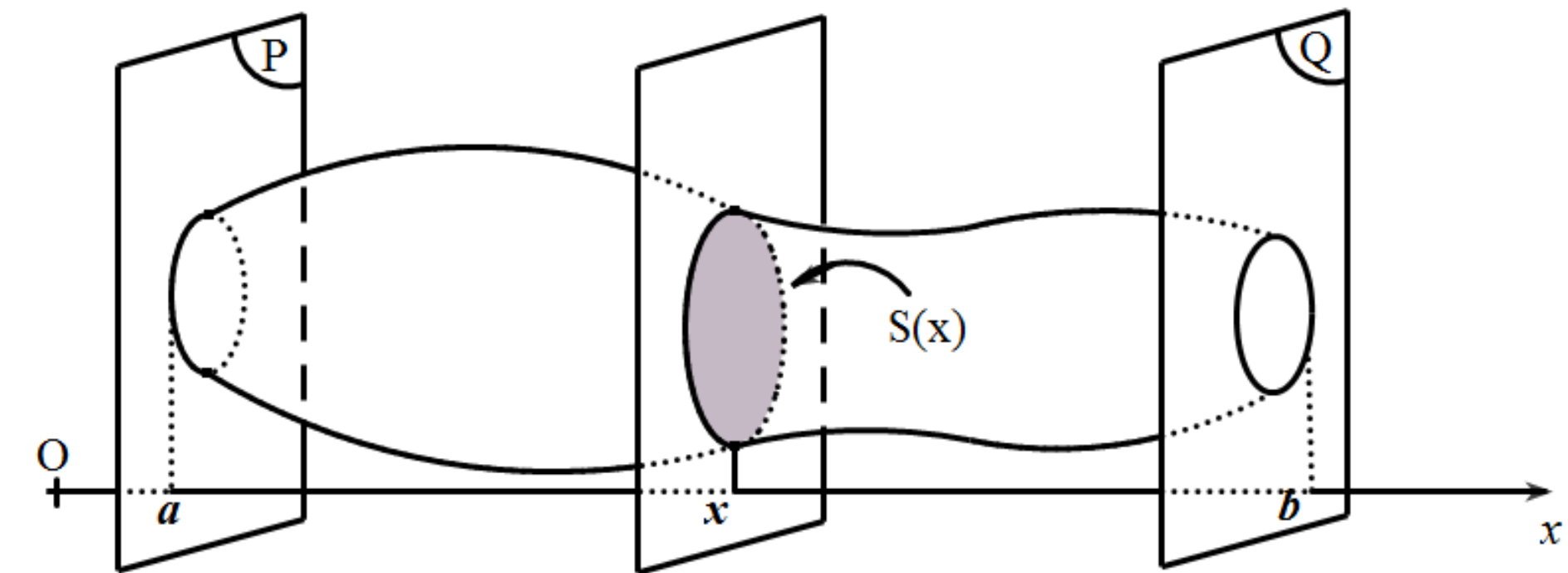
## II TÍNH THỂ TÍCH

### 1. Thể tích của vật thể

Cắt vật thể  $\mathcal{V}$  bởi 2 mặt phẳng  $(P), (Q)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ).

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ), cắt vật thể  $\mathcal{V}$  theo thiết diện có diện tích là  $S(x)$ . Giả sử  $S(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ .

👉 Thể tích  $V$  của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  được tính bởi công thức:



$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (1)$$

## VÍ DỤ MINH HỌA



### Ví dụ 1:

Cho vật thể  $\vartheta$  giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình  $x = 0, x = 2$ . Cắt vật thể trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ bằng  $x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ), ta thu được thiết diện có diện tích bằng  $3x^2$ . Tính thể tích của vật thể đó.



### Bài giải

Diện tích thiết diện:  $S(x) = 3x^2$

Thể tích của vật thể  $\vartheta$ :  $V = \int_0^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^2 = 8 \text{ (đvtt)}$

Hai mặt phẳng:

$$x = 0, x = 2$$

Diện tích thiết diện:

$$S(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b S(x) dx$$



## VÍ DỤ MINH HỌA

### Ví dụ 2:

Cho vật thể  $\vartheta$  giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình  $x = 0, x = \pi$ . Cắt vật thể trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ bằng  $x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ), ta thu được thiết diện là hình tròn có bán kính bằng  $\sqrt{\sin x}$ . Tính thể tích của vật thể đó.

### Bài giải

Diện tích thiết diện:  $S(x) = \pi \left( \sqrt{\sin x} \right)^2 = \pi \sin x$

Thể tích của vật thể  $\vartheta$ :  $V = \int_0^{\pi} \pi \sin x dx = -\pi \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\pi$

Hai mặt phẳng:

$$x = 0, x = \pi$$

Diện tích hình tròn:

$$S = \pi R^2$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b S(x) dx$$

## II TÍNH THỂ TÍCH

### 2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt

#### Bài toán

Tính thể tích khối chóp có diện tích đáy  $B$  và chiều cao  $h$ .

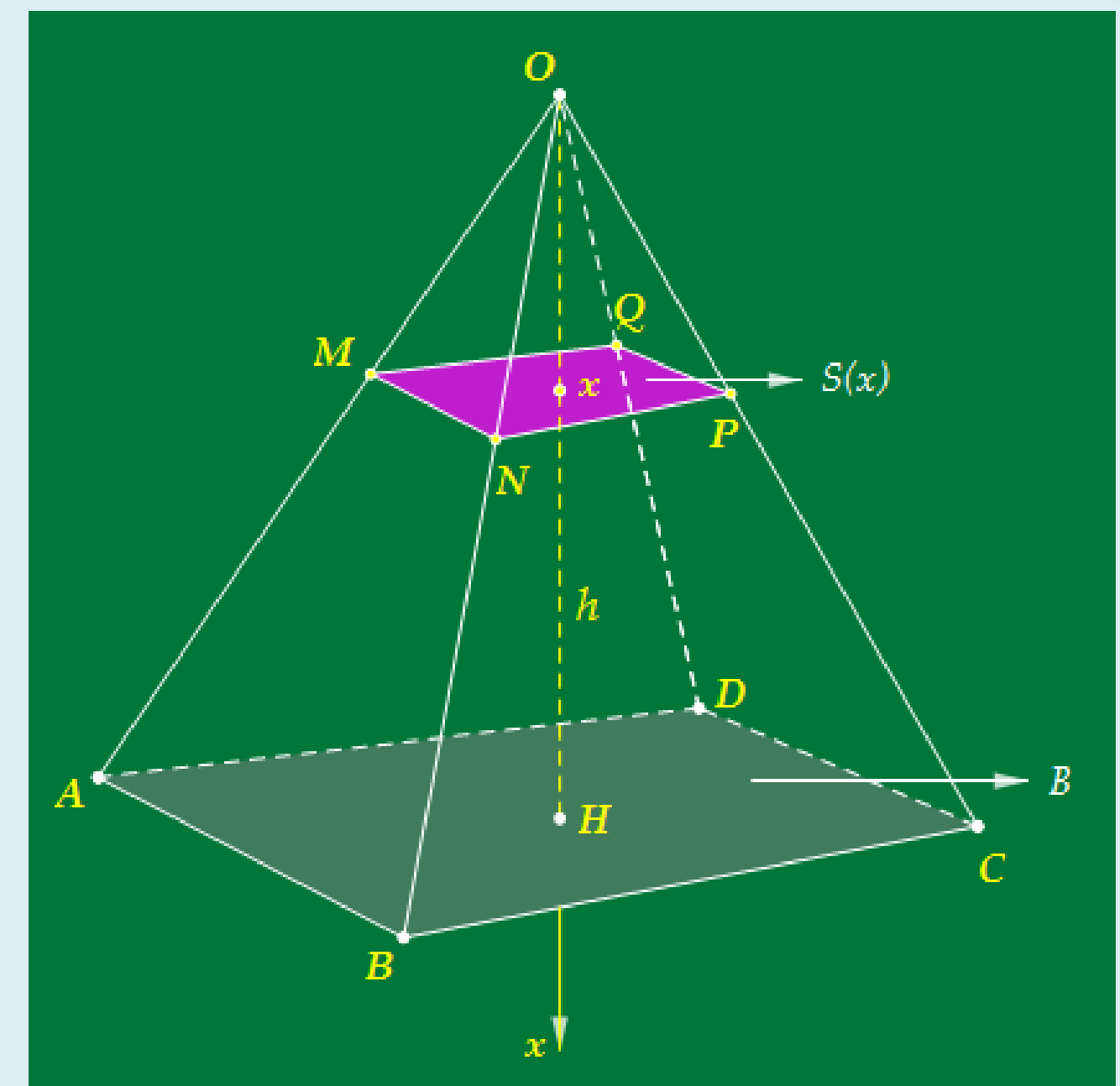
#### Hướng dẫn

Ta có:  $OH = h$

Đa giác  $MNPQ$  đồng dạng với đáy với tỉ số đồng dạng  $\frac{x}{h}$

$$\Rightarrow \frac{S(x)}{B} = \frac{x^2}{h^2} \Rightarrow S(x) = \frac{B}{h^2} x^2$$

$$\text{Thể tích của khối chóp: } V = \int_0^h \frac{B}{h^2} x^2 dx = \frac{B}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Bh$$



## II TÍNH THỂ TÍCH

### 2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt

#### ☑️ Thể tích khối chóp

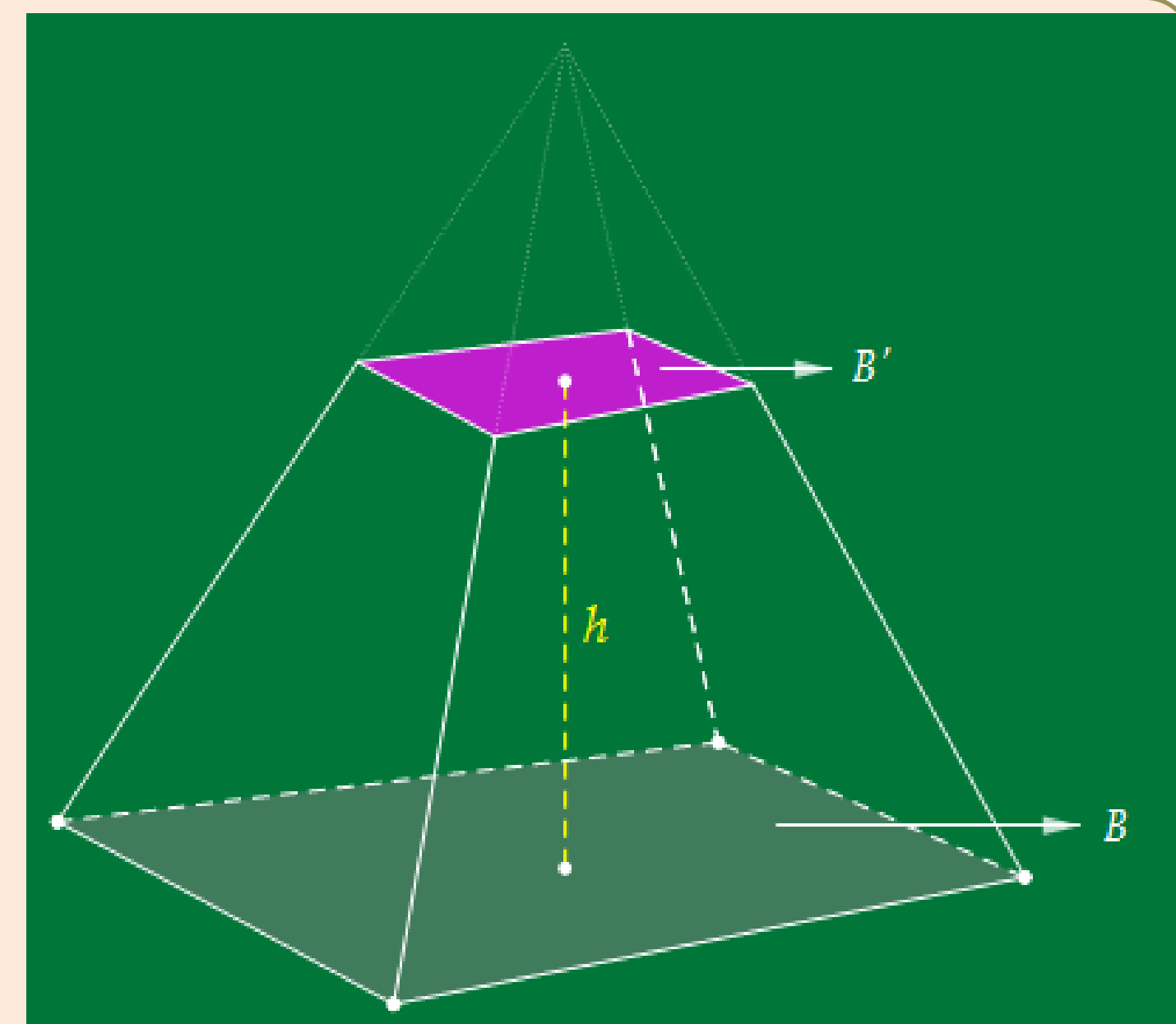
Thể tích khối chóp có diện tích  $B$  đáy và chiều cao  $h$  được tính bởi công thức:

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

#### ☑️ Thể tích khối chóp cụt

Thể tích khối chóp cụt có diện tích hai đáy lần lượt là  $B, B'$  và chiều cao  $h$  được tính bởi công thức:

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{BB'} + B')$$

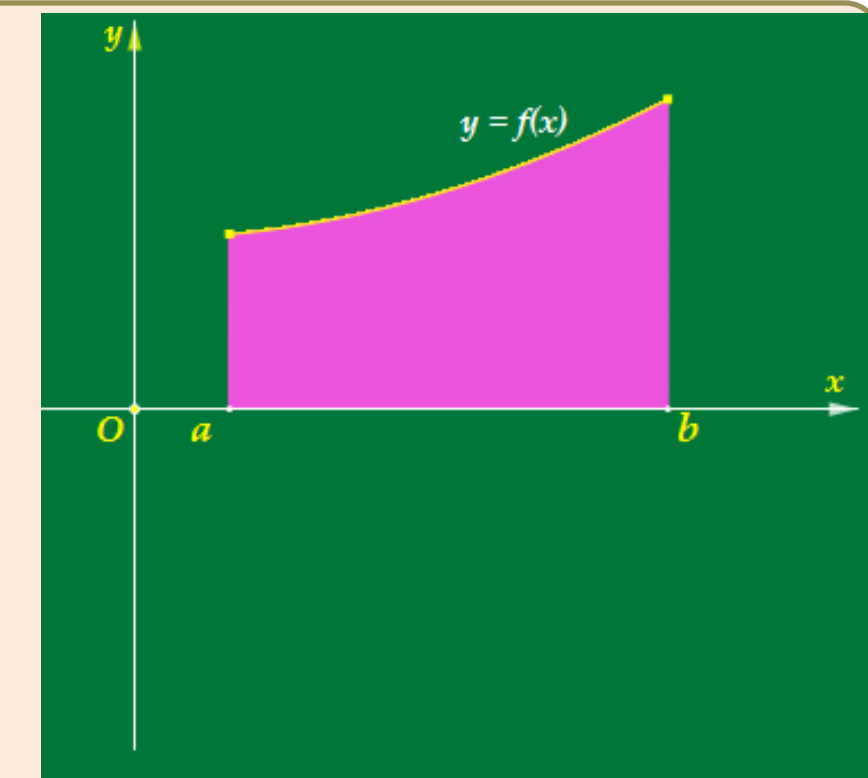




### III THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

#### Bài toán

Cho một hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay xung quanh trục  $Ox$  tạo thành một khối tròn xoay. Tính thể tích  $V$  của nó.

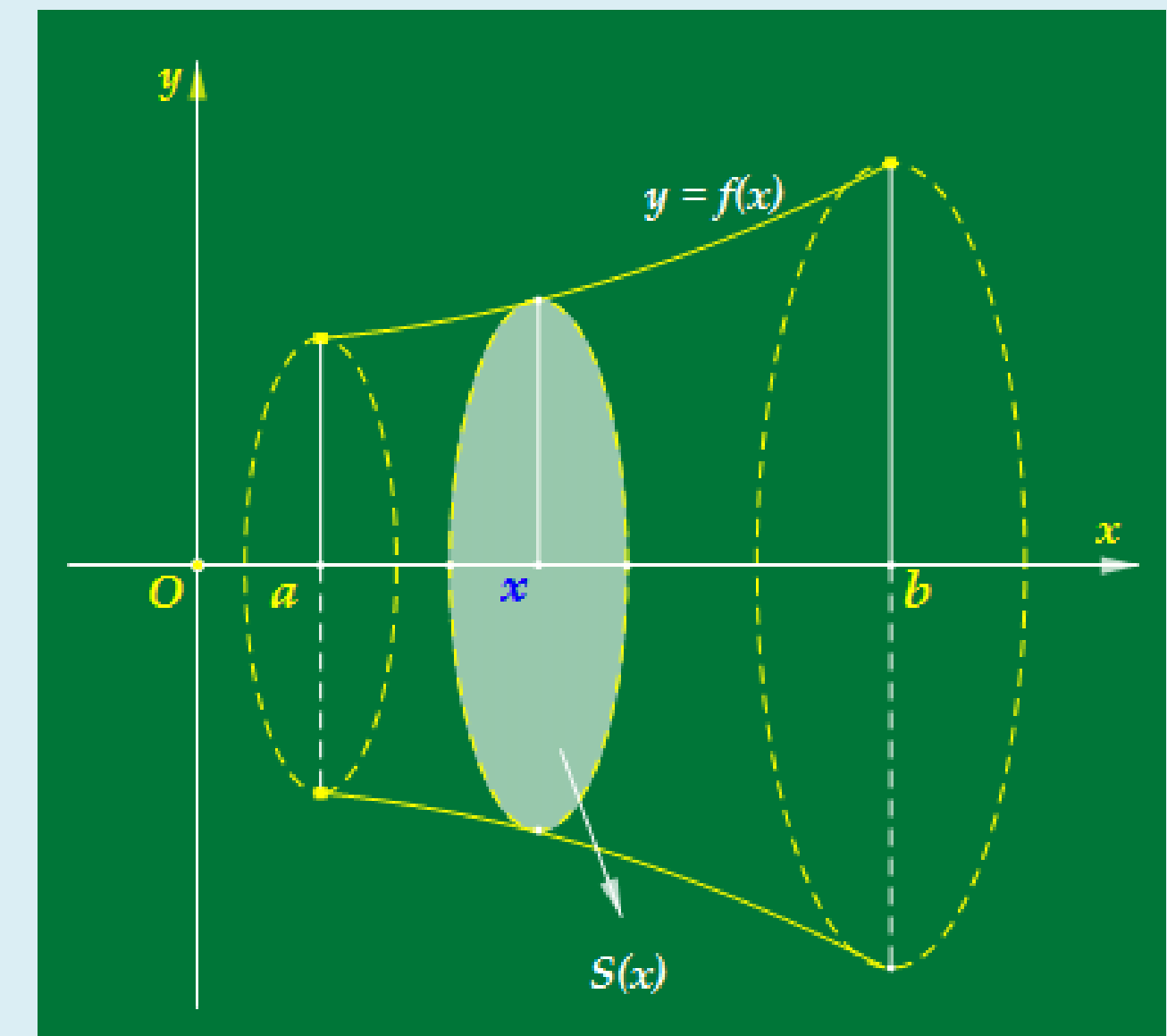


#### Hướng dẫn

Thiết diện của khối tròn xoay trên tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x \in [a; b]$  là hình tròn có bán kính bằng  $|f(x)|$ .

Suy ra  $S(x) = \pi f^2(x)$ .

Vậy  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

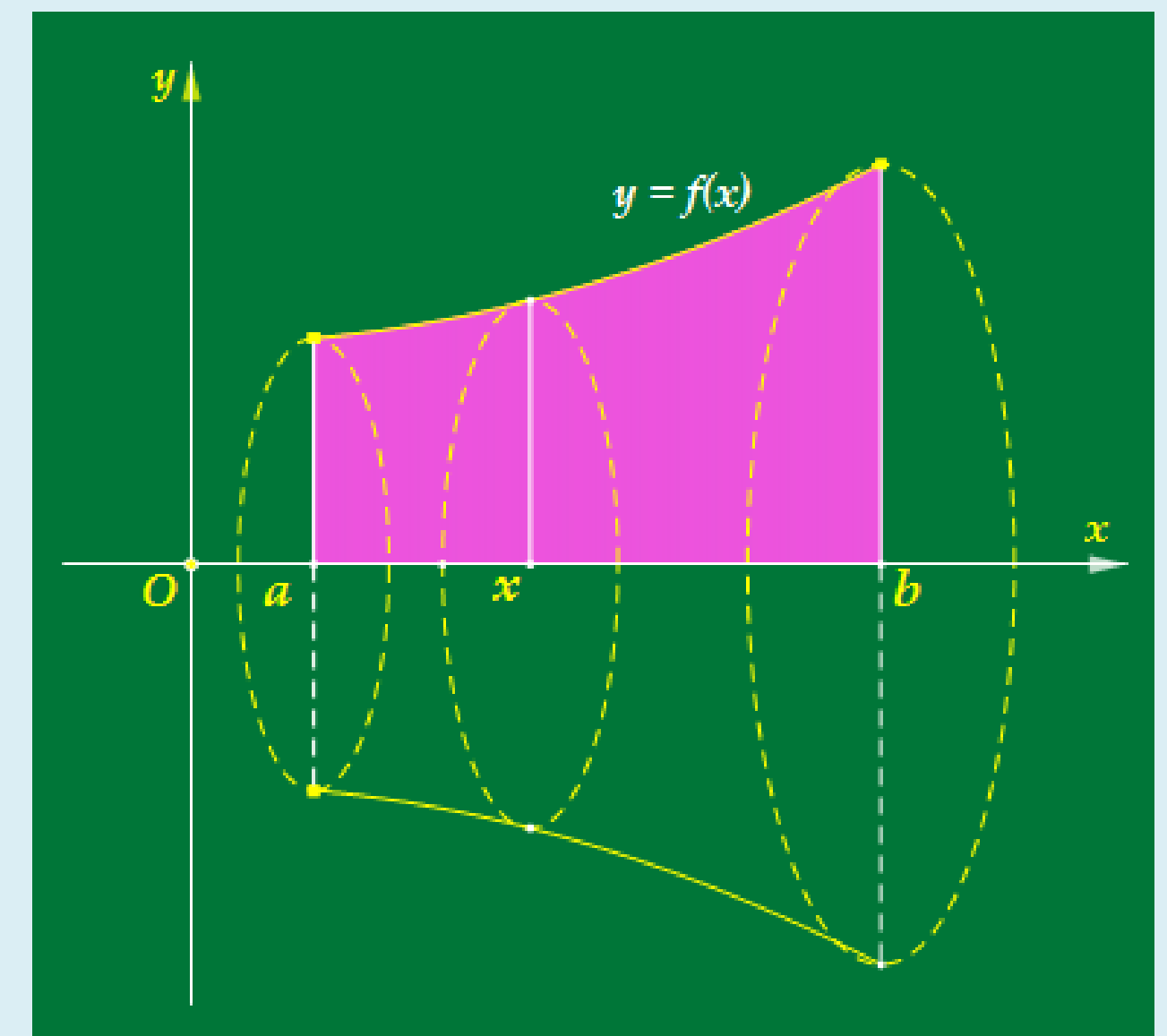


### III THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ .

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  xung quanh trục  $Ox$  được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (2)$$





## VÍ DỤ MINH HỌA

### Ví dụ 3:

Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ , trục  $Ox$  và  $x = 0, x = 1$  xung quanh trục  $Ox$ .

### Bài giải

Thể tích của khối tròn xoay:

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$$

$$(H) \begin{cases} y = e^x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## VÍ DỤ MINH HỌA

### Ví dụ 4:

Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 0$  và  $x = 3$  xung quanh trục  $Ox$ .

### Bài giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\begin{aligned} \text{Thể tích của khối tròn xoay: } V &= \pi \int_1^3 (x^2 - 2x + 1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 (x - 1)^4 dx = \pi \frac{(x - 1)^5}{5} \Big|_1^3 \\ &= \frac{32\pi}{5} \end{aligned}$$

$$(H) \begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{PT: } f(x) = 0$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

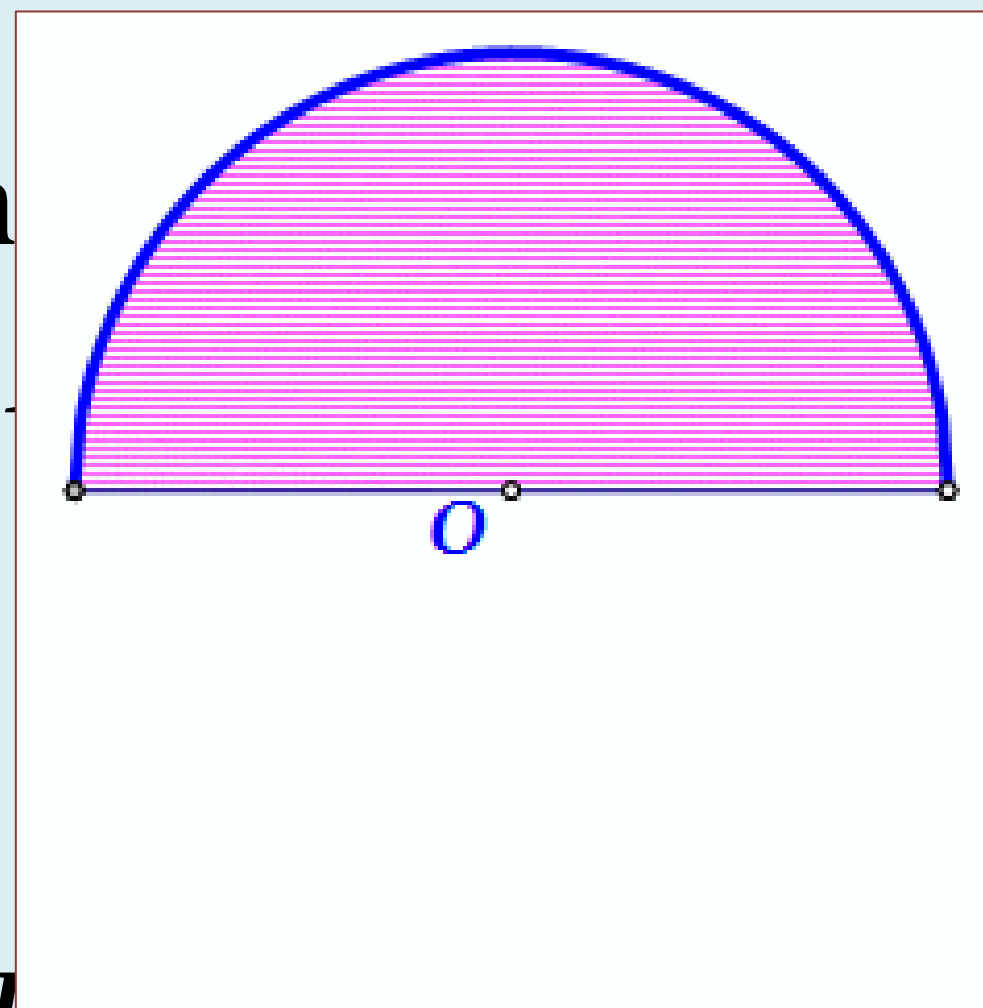
## VÍ DỤ MINH HỌA

### Ví dụ 5:

Tính thể tích  $V$  của khối cầu có bán kính  $R$ .

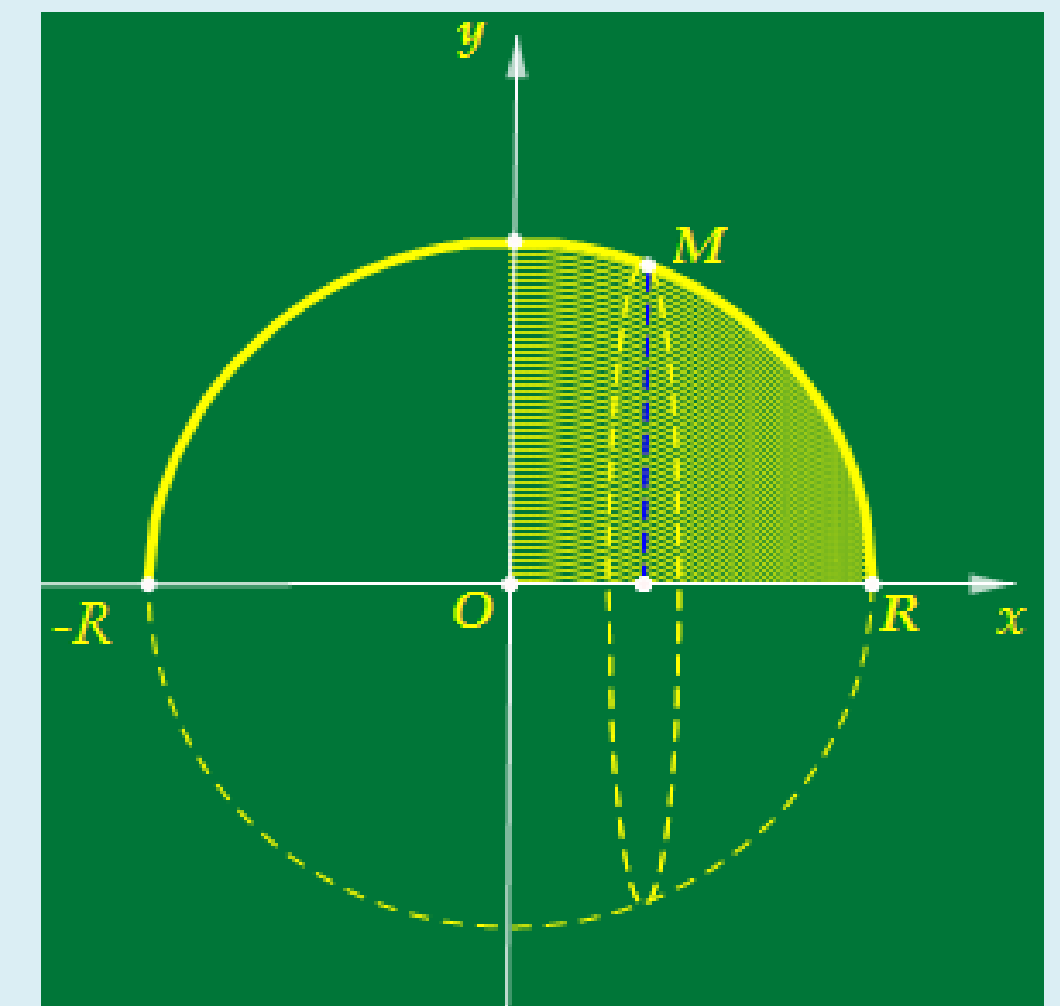
### Bài giải

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay giới hạn bởi  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = R$ .



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^R \left( \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = 2V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

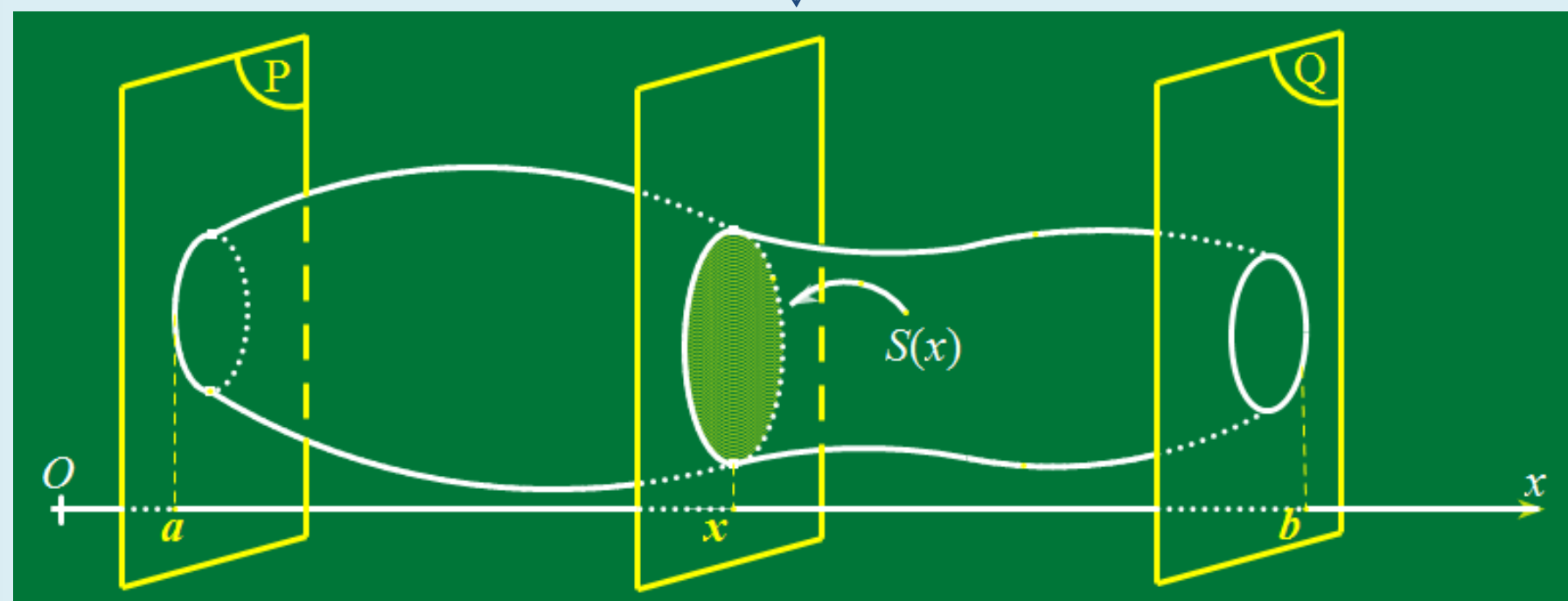


$$\Rightarrow (M) \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ x = 0, x = R \end{cases}$$



## Ứng dụng tích phân để tính thể tích

### Thể tích vật thể

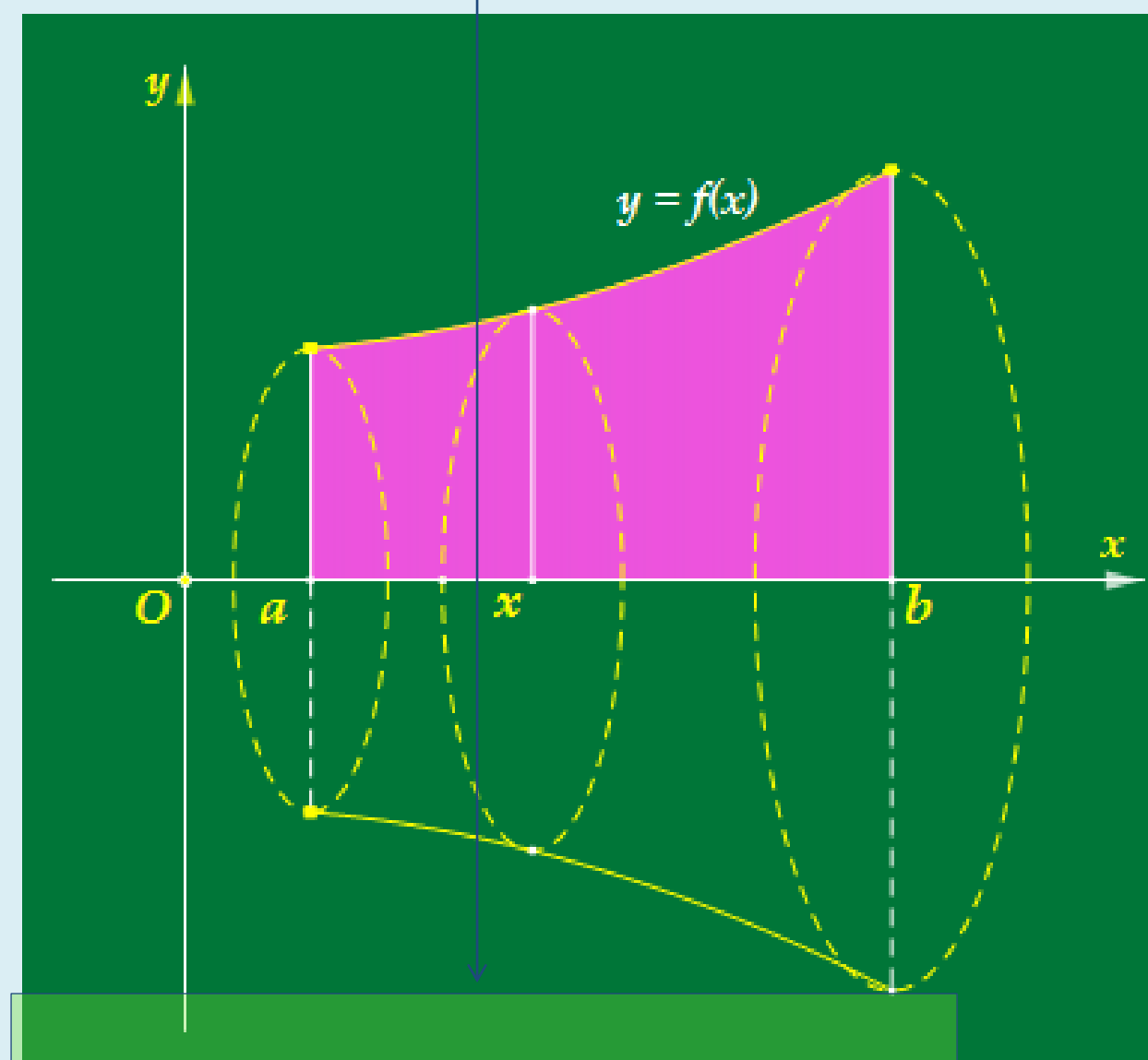


$$V = \int_a^b S(x) dx$$

### Thể tích khối tròn xoay

$$(H) \begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



### Khối chóp cụt

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{BB'} + B')$$



# CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 1

Cắt một vật thể  $\vartheta$  bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với  $Ox$  tại điểm  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt  $\vartheta$  theo thiết diện có diện tích là  $S(x)$ . Giả sử  $S(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  có thể tích được tính bởi công thức nào dưới đây?

**A.**  $V = \pi \int_a^b S(x) dx.$

**B.**  $V = \int_a^b S(x) dx.$

**C.**  $V = \int_a^b S^2(x) dx.$

**D.**  $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx.$



### Bài giải

**Chọn B.**

Câu hỏi lý thuyết.





## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 2

Thể tích của khối tròn xoay được tạo ra khi quanh hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = 1, x = 4$  khi quay quanh trục  $Ox$  được tính bởi công thức nào dưới đây?

**A.**  $V = \int_1^4 \sqrt{x} dx.$

**B.**  $V = \pi \int_1^4 x dx.$

**C.**  $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$

**D.**  $V = \int_1^4 x dx.$



### Bài giải

**Chọn B.**

Thể tích khối tròn xoay:  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

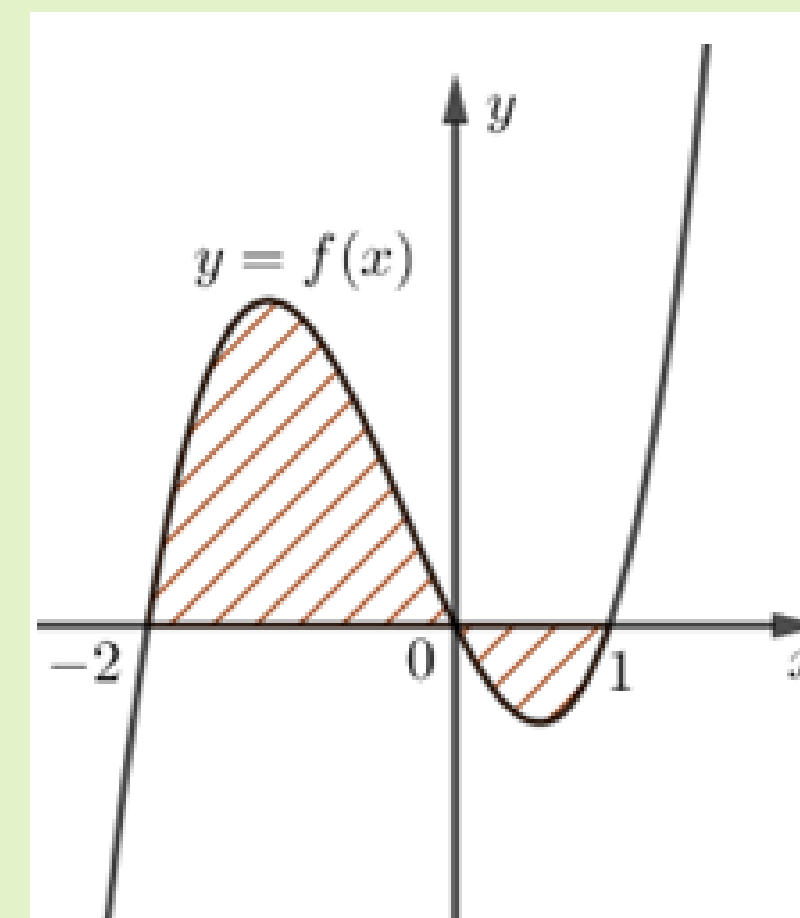
Suy ra  $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 3

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  liên tục trên  $R$  và có đồ thị như hình bên. Khi quay hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành (phần gạch chéo) quanh trục hoành ta thu được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó được tính bởi công thức nào dưới đây?



**A.**  $V = \int_{-2}^1 f^2(x) dx.$

**B.**  $V = \pi \int_{-2}^0 f^2(x) dx - \pi \int_0^1 f^2(x) dx.$

**C.**  $V = \pi \int_{-2}^1 f^2(x) dx.$

**D.**  $V = \int_{-2}^0 f^2(x) dx + \int_0^1 f^2(x) dx.$



### Bài giải

**Chọn C.**

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình  $(H)$  quanh  $Ox$  được tính bởi công thức:  $V = \pi \int_{-2}^1 f^2(x) dx.$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 5

Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \tan x$ , trục  $Ox$ , trục  $Oy$  và đường thẳng  $x = \frac{\pi}{4}$  quanh trục  $Ox$ .

**A.**  $V = \pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$

**B.**  $V = \pi \ln 2.$

**C.**  $V = 1 - \frac{\pi}{4}.$

**D.**  $V = \ln 2.$



### Bài giải

**Chọn A.**

Thể tích khối tròn xoay:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \pi \left( \tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Sử dụng máy tính fx- 580VNX

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^2 dx$$

0.6741915533

$$\pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

0.6741915533





## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 6

Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2x - x^2$  và trục hoành. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay sinh ra khi cho  $(H)$  quay quanh trục  $Ox$ .

**A.**  $V = \frac{4}{3}$ .

**B.**  $V = \frac{4}{3}\pi$ .

**C.**  $V = \frac{16}{15}\pi$ .

**D.**  $V = \frac{16}{15}$ .



### Bài giải

**Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

Thể tích khối tròn xoay:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

Sử dụng máy tính fx- 580VNX

$$\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15}$$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 7

Tính thể tích  $V$  của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $x = 1$  và  $x = 4$ , biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) thì được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh là  $2x$ .

**A.**  $V = 63\sqrt{3}\pi$ .

**B.**  $V = 126\sqrt{3}$ .

**C.**  $V = 63\sqrt{3}$ .

**D.**  $V = 126\sqrt{3}\pi$ .



### Bài giải

**Chọn B.**

Diện tích thiết diện:  $S(x) = 6 \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}x^2$

Thể tích phần vật thể:

$$V = \int_1^4 6\sqrt{3}x^2 dx = 2\sqrt{3}x^3 \Big|_1^4 = 126\sqrt{3}$$

Sử dụng máy tính fx- 580VNX

$$\int_1^4 6\sqrt{3}x^2 dx$$

218.2384018

$$126\sqrt{3}$$

218.2384018



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 8

Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{\ln x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  và  $x = k$ .  
Gọi  $V_k$  là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình  $(H)$  quay trục  $Ox$ . Biết rằng  $V_k = \pi$ .  
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $4 < k < 5$ .

**B.**  $1 < k < 2$ .

**C.**  $2 < k < 3$ .

**D.**  $3 < k < 4$ .



### Bài giải

**Chọn C.**

$$V_k = \pi \int_1^k \ln x dx = \pi \left( x \ln x - x \right) \Big|_1^k = \pi (k \ln k - k + 1)$$

$$\text{Do } V_k = \pi \text{ nên } \pi (k \ln k - k + 1) = \pi \Leftrightarrow k \ln k - k + 1 = 1 \Leftrightarrow k (\ln k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = e \in (2; 3)$$





## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 9

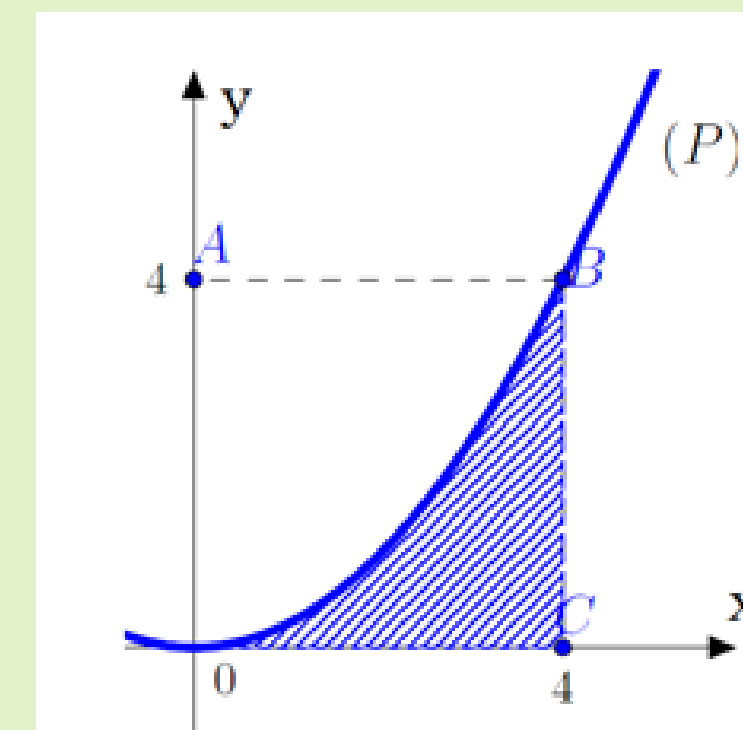
Cho hình vuông  $OABC$  có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi parabol  $(P)$  có đỉnh tại  $O$ . Gọi  $S$  là hình phẳng không bị gạch (như hình vẽ). Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay khi cho phần  $S$  quay quanh trục  $Ox$ .

**A.**  $V = \frac{128\pi}{5}$ .

**B.**  $V = \frac{128}{3}$ .

**C.**  $V = \frac{64\pi}{5}$ .

**D.**  $V = \frac{256\pi}{5}$ .



### Bài giải

**Chọn D.**

Ta có parabol  $(P)$  có đỉnh  $O$  và đi qua điểm  $B(4;4)$  có phương trình  $y = \frac{1}{4}x^2$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (phần gạch chéo) khi quay quanh trục  $Ox$  là:

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left( \frac{1}{4}x^2 \right)^2 dx = \frac{64\pi}{5}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình vuông  $OABC$  quanh cạnh  $OC$  là:  $V_2 = \pi r^2 h = 64\pi$

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính:  $V = V_2 - V_1 = 64\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{256\pi}{5}$

## DẶN DÒ

- 1** Học công thức và làm lại các ví dụ trong bài.
- 2** Ôn tập lại kiến thức chương 3